2013학년도 중등교사신규임용후보자선정경쟁시험

수　　학

2차 시험	2교시	2문항 50점	시험 시간 120분

수험생 유의 사항

1. 문제지(초안 작성 용지 포함)와 답안지의 전체 면 수와 인쇄 상태를 확인하시오. **답안지는 문항당 2쪽(교시당 4쪽), 초안 작성 용지는 교시당 4쪽입니다. 답안은 문항당 2쪽 이내로만 작성하시오.**
2. 각각의 문항에 대한 답안은 **해당 문항의 전용 답안지에만 작성하시오.**
3. 답안지 모든 면의 상단에 **컴퓨터용 사인펜을 사용**하여 성명과 수험 번호를 기재하고, 수험 번호, 문항별 답안지 쪽 번호를 해당란에 '●'로 표기하시오. '●'로 표기한 부분을 수정하고자 할 경우에는 반드시 수정 테이프를 사용하시오.

예시	1번 문항, 1번째 답안지 표기		1번 문항, 2번째 답안지 표기	
	문항 1 전용 답안지	쪽 번호 표기란 ● ②	**문항 1** 전용 답안지	쪽 번호 표기란 ① ●

4. 답안은 **지워지거나 번지지 않는 동일한 종류의 검은색 펜**을 사용하여 작성하시오**(연필이나 사인펜 종류는 사용할 수 없음.)**.
5. 답안지에는 문항 내용을 일절 옮겨 적지 마시오. 단, 하위 문항이 있을 경우, 하위 문항의 번호(1-1, 1-2)를 답안지 앞부분에 쓰고 답안을 작성하시오.
6. 각 문항 답안 작성 후 **마지막 문장 뒤에는 반드시 '끝' 자를 쓰시오**(하위 문항이 있는 경우 각 하위 문항에도 '끝' 자를 쓰시오.).
7. 답안 초안 작성은 초안 작성 용지를 활용하시오. **초안 작성 용지는 답안지로 인정하지 않습니다.**
8. **답안지 교체가 필요한 경우에는 답안 작성 시간을 고려하기 바라며, 종료종이 울리면 답안을 일절 작성할 수 없습니다. 답안지 교체 후에는 교체 전 답안지를 폐답안지로 처리합니다.**
9. 답안 수정 시 삭제하고자 하는 부분에 두 줄(═)을 그으시오.
10. **다음에 해당하는 답안은 채점하지 않으니 유의하시오.**
    - **다른 문항의 답안지에 작성한 부분**
    - 문항당 답안지 2쪽을 초과하여 작성한 부분
    - **답안 작성란** 이외의 공간(뒷면 등)에 작성한 부분
    - 내용이 지워지거나 번지는 등 식별이 불가능한 부분
    - 수정 테이프나 수정액을 사용하여 수정한 부분
    - 개인 정보를 노출한 답안지 전체
    - 개인 정보를 암시하는 표시가 있는 답안지 전체
11. 시험 종료 전까지 답안 작성을 완료해야 합니다. **시험 종료 후 답안 작성은 부정 행위로 간주**됩니다.
12. **답안을 작성하지 않은 빈 답안지에도 성명, 수험 번호, 문항별 답안지 쪽 번호를 기재 · 표기한 후, 답안지 4쪽을 모두 제출하시오.**

3. 0 이상의 정수 n에 대하여 $n+1$차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^{n+1}$에서 원점 O로부터 거리가 1인 위치에 있는 점들의 모임을 n차원 구라고 하고

$$S^n = \left\{\xi = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\xi\|^2 = 1\right\}$$

로 나타낸다. 예를 들어, S^1은 원, S^2는 구면이다.

(단, $\|\xi\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2}$이고, S^n의 위상은 $\mathbb{R}^{n+1}$ 위의 보통위상(usual topology)의 상대위상(relative topology)이다.) **【30점】**

3-1. 학생 갑과 을이 위에 제시된 n차원 구의 정의를 보고 다음과 같은 대화를 나누었다.

> **갑**: S^1, S^2는 모두 연결 공간(connected space)이네. 아마도 '모든 S^n이 연결 공간이다.'라는 명제는 참인 것 같아. 그래서 다음과 같이 증명해 보았어.
>
> ○ 1단계 : 사상 $g : (\mathbb{R}^{n+1} - \{O\}) \to S^n$을 $g(\xi) = \dfrac{\xi}{\|\xi\|}$로 정의하면 이 사상은 연속(continuous)이고 전사(surjective)이다.
>
> ○ 2단계 : 연결 공간의 연속사상에 대한 상(image)은 연결 공간이다.
>
> ○ 3단계 : $\mathbb{R}^{n+1} - \{O\}$은 연결 공간이다.
>
> ○ 4단계 : 2단계와 3단계로부터 S^n도 연결 공간이다.
>
> **을**: 음, 의심스러운데?
> $S^0 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$이잖아.
> 즉, S^0은 연결 공간이 아니지.
>
> **갑**: 아, 그럼 그 반례에 대해 이렇게 대응해야겠구나!
>
> | 개선된 추측(명제) |
> |---|

라카토스(I. Lakatos)는 수학적 지식이 증명과 반박의 논리에 의해 추측이 개선되는 과정을 통해 성장한다고 주장하였다. 추측에 대한 반례가 출현할 때 라카토스가 제시한 대응 방법 중 다음에 제시된 (가), (나), (다)에 대해 기술하시오. 그리고 위의 상황에서 나타난 반례에 대한 대응을 보조정리합체법을 이용하여 개선된 추측(명제)과 함께 구체적으로 설명하시오. [10점]

> (가) 괴물배제법(monster-barring method)
> (나) 예외배제법(exception-barring method)
> (다) 보조정리합체법(lemma-incorporation method)

3-2. 3차원 구

$$S^3 = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\right\}$$

에 대한 질문 (Ⅰ), (Ⅱ)에 답하시오. [20점]

> (Ⅰ) S^3에 대해서 다음과 같은 동치관계로 정의된 상공간(quotient space)을 $S^3/\sim$라 하자.
> $(x_1, y_1, z_1, w_1) \sim (x_2, y_2, z_2, w_2) \Leftrightarrow w_1 > 0,\ w_2 > 0$
> 이때 다음 (가), (나)의 참, 거짓을 판단하고 그 이유를 설명하시오.
>
> > (가) $S^3/\sim$은 컴팩트(compact)이다.
> > (나) $S^3/\sim$과 S^3은 위상동형(homeomorphic)이다.
>
> (Ⅱ) 사영사상 $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $p(x, y, z, w) = (x, y, z)$에 대하여 $H = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z + w = 0\}$와 S^3의 교집합 $H \cap S^3$을 생각하면, $M = p(H \cap S^3)$는 $\mathbb{R}^3$에서 점 $(1, 0, 0)$을 포함하는 정규곡면(정칙곡면, regular surface)이 된다. 이때 M의 점 $(1, 0, 0)$에서의 가우스곡률(Gaussian curvature)을 구하시오.

4. 두 양수 a, b에 대하여

$$K(a,\, b) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt$$

를 구하시오. 그리고 실수 x에 대하여

$$s_n(x) = \sum_{m=1}^{n} K(m,\, 2m)|x|\cos(mx)$$

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

라 할 때 $\int_{-\pi}^{\pi} s(x)dx$를 구하시오. **【20점】**

※ 아래 제시된 성질은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

<성 질>

(가) 복소평면에서 두 양수 a, b에 대하여
$C : z(t) = a\cos t + i\, b\sin t\ (0 \le t \le 2\pi)$일 때
$\int_C \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$ 이다.

(나) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

(다) 자연수 m에 대하여
$\int_0^{\pi} x\cos(mx)dx = \frac{(-1)^m - 1}{m^2}$ 이다.

(라) 구간 I에서 정의된 함수열 $\{f_n\}$이 있다. 모든 자연수 n과 모든 $x \in I$에 대하여 $|f_n(x)| \le M_n$이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$이 수렴하면 함수급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$은 I에서 평등수렴(균등수렴, uniform convergence)한다.

(마) 닫힌 구간 $[a, b]$에서 적분 가능한 함수열 $\{f_n\}$이 f로 평등수렴하면 f도 적분 가능하고
$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ 이다.

수고하셨습니다