2014학년도 중등학교교사임용후보자선정경쟁시험

수 학

수험 번호 : (　　　　　　)　　　성　명 : (　　　　　)

1차 시험	2 교시 전공A	21문항 50점	시험 시간 90분

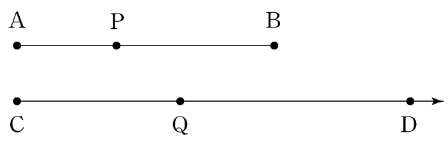
○ 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하시오.
○ 모든 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.

기입형 【1 ~ 15】

1. 프로이덴탈(H. Freudenthal)의 수학화 교수 · 학습 이론에 따르면, 아래의 2가지 사항은 현상으로부터 본질에 이르는 접근이 아니라 학습자에게 본질을 부과하는 접근이다. 프로이덴탈은 이와 같은 교수학적 접근 방식을 무엇이라 하였는지 쓰시오. [2점]

> ○ 기성 수학의 전개 순서에 따라 학교수학의 교재를 구성하는 것
> ○ 수학화 과정에 대한 경험은 생략하고 기성 지식을 초등화해 가르치는 것

2. 다음은 어떤 수학적 개념의 원형과 그 개념에 들어있는 아이디어를 다룬 교사 교육용 자료의 일부이다.

> • 이 개념의 원형은 다음과 같다.
>
> [그림]과 같이 선분 AB와 반직선 CD에 대하여, 선분 AB 위의 점 P와 반직선 CD 위의 점 Q가 각각 A와 C로부터 같은 속도로 동시에 출발하여 각각의 선을 따라 움직인다고 하자. 이때 점 P의 속력은 PB의 거리에 비례하고, 점 Q의 속력은 일정하다고 하자.
>
> 
>
>
> [그림]
>
> 이때, 거리 CQ를 거리 PB의 (　　)(이)라고 하였다.
>
> • 다음은 이 개념에 들어있는 아이디어를 활용한 계산의 한 예이다.
>
> | n | $\cdots$ | 1005 | $\cdots$ | 1009 | $\cdots$ | 2014 | $\cdots$ |
> |---|---|---|---|---|---|---|---|
> | $(1.0001)^n$ | $\cdots$ | 1.1057181 | $\cdots$ | 1.1061604 | $\cdots$ | 1.2231016 | $\cdots$ |
>
> 이 표를 활용하면, $1.1057181 \times 1.1061604$ 의 근삿값을 쉽게 얻을 수 있다.
>
> $\cdots$ (하략) $\cdots$

(　　) 안에 들어갈 용어가 무엇인지 쓰시오. 그리고 수학을 완성된 생산품으로 제공하는 것이 아니라 수학이 발생해 온 과정을 경험하게 하기 위해 수학적 개념의 원형이나 그 개념에 들어있는 아이디어를 활용하는 교수 · 학습 원리가 무엇인지 쓰시오. [2점]

3. 다음은 중학교 2학년 기하 영역의 평행사변형의 성질을 다루는 수업의 일부이다.

> 교사 : 측정 활동을 통해 알아낸 평행사변형의 성질 '두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.'가 왜 성립하는지 설명해 보도록 하지요.
> 학생 : 어려워요.
> (이 문제를 해결한 학생이 없는 듯 보인다.)
> 교사 : <u>시간이 없으니 어쩔 수 없네. 대각선을 그어 평행사변형을 두 삼각형으로 나누면, 그 두 삼각형이 합동이 돼요. 그러면 그 성질이 성립한다는 것을 바로 보일 수 있을 것입니다.</u>
> 학생 : 합동이 되니까 성립하네요.
> 교사 : 그러면 다음 내용을 공부합시다.

밑줄 친 부분에서 학생 스스로 학습할 환경을 교사가 제거하는 현상이 발생하고 있다. 여기서 이 교수학적 현상은 '교사는 수학적 지식을 가르쳐야 하고 학생은 그것을 배워야 한다.'는 압박에 의해 발생한다고 할 수 있다. 브루소(G. Brousseau)의 수학 교수학적 상황론(Theory of Didactical Situations in Mathematics)에서 이러한 현상을 설명할 수 있는 개념과 이러한 압박을 설명할 수 있는 개념을 각각 쓰시오. [2점]

4. 다음은 중학교 1학년 기하 영역에서 모든 다각형의 외각의 크기의 합이 360°임을 알아내는 수업 상황이다.

> (학생들은 삼각형의 외각의 크기의 합이 360° 임은 알고 있지만, 아직은 n각형의 외각의 크기의 합을 구할 수 없는 상태이다.)
> … (상략) …
> 교사 : (그림을 제시하며) 다각형의 각 꼭짓점에서 내각과 외각의 크기의 합은 얼마인가요?
> 학생 : 180° 입니다.
> 교사 : 그러면 n각형의 모든 내각과 외각의 크기의 합은 얼마인가요?
> 학생 : $180° \times n$ 입니다.
> 교사 : 외각의 크기의 합은 어떻게 구할 수 있을까요?
> 학생 : 잘 모르겠어요.
> 교사 : 내각과 외각의 관계를 생각해 보면 외각의 크기의 합을 구할 수 있지 않을까요? (다각형에 외각과 내각을 표시하면서 외각과 내각의 관계를 떠올리게 한다.)
> 학생 : 아! 알겠어요. 내각과 외각의 크기의 합에서 내각의 크기의 합을 빼면 될 것 같아요.
> 교사 : 내각의 크기의 합은 알고 있지요?
> 학생 : 네. $(n-2)\times 180°$ 입니다.
> 교사 : 그러면 외각의 크기의 합을 구하는 식을 나타낼 수 있을까요?
> 학생 : (외각의 크기의 합) $= 180° \times n -$ (내각의 크기의 합) $= 180° \times n - 180° \times (n-2) = 360°$ 입니다.
> 교사 : 잘했어요. 따라서 다각형에서 외각의 크기의 합은 언제나 360°로 일정함을 알 수 있어요.
> … (하략) …

위 상황에서 교사는 학생의 근접 발달 영역에서 교사의 사고 과정을 모방할 수 있는 시범이나 실마리를 제공하고 있다. 이러한 교수·학습 상황에서 학생들이 과제를 수행해 나가는 데 있어서 도움을 적절히 조절하며 제공하는 것을 비고츠키(L. Vygotsky) 학파는 무엇이라 하는지 쓰시오. [2점]

5. 10과 서로소인 양의 정수 m에 대하여 m^{18}의 마지막 두 자리 수가 21이다. m^{294}의 마지막 두 자리 수를 구하시오. [2점]

6. 위수(order)가 $2014 = 2\times 19\times 53$인 순환군(cyclic group) G에 대하여 G의 부분군의 개수를 m, G에서 위수가 38인 원소의 개수를 n이라 하자. $m+n$의 값을 구하시오. [2점]

7. 반복적분 $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 7y^2 \sin(x^7)\,dx\,dy$의 값을 구하시오. [2점]

8. 거듭제곱급수(멱급수, power series) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{5^n \sqrt{n}}$의 수렴구간을 구하시오. [2점]

9. 양수 $r>0$에 대하여 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\begin{cases} x^6\sin\dfrac{1}{x^r}+x^r\sin\dfrac{1}{x^2}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

함수 f의 도함수 f'이 $x=0$에서 연속이기 위한 필요충분조건을 r에 대한 부등식으로 나타내시오. [2점]

10. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^2xe^{-2nx}\,dx$의 값을 구하시오. [2점]

11. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)과 곡률(curvature)이 각각 상수 τ, 1인 단위속력 곡선 α에 대하여, 곡선 β를 다음과 같이 정의하자.

$$\beta(s)=\int_0^s \boldsymbol{N}(t)\,dt$$

여기서 $\boldsymbol{N}(t)$는 곡선 α의 주법벡터장(단위주법벡터장, principal normal vector field, unit principal normal vector field)이다.
곡선 β의 곡률과 비틀림률을 각각 $\kappa_\beta(>0)$, τ_β라 할 때, $\kappa_\beta+\tau_\beta$의 값을 구하시오. [2점]

12. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에 놓인 곡면

$$M : X(u,\ v) = \left(u\cos v,\ u\sin v,\ \frac{1}{2}u^2\right)\ \ (u \ge 0,\ 0 \le v \le 2\pi)$$

에 포함되는 영역 $S = \{X(u,\ v) \mid 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le \pi\}$가 있다. S의 경계(boundary) ∂S의 측지곡률을 κ_g라 할 때, ∂S의 측지곡률합(전측지곡률, total geodesic curvature) $\int_{\partial S} \kappa_g\, ds$의 절댓값을 구하시오. (단, s는 호의 길이를 나타내는 매개변수이다.) [2점]

> ○ 도움말
> 정칙곡선(정규곡선, regular curve) $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$들로 이루어진 조각별 정칙곡선(piecewise regular curve) α의 측지곡률합은 $\int_{\alpha} \kappa_g\, ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i} \kappa_g\, ds$로 정의된다.

13. 좌표평면 $\mathbb{R}^2$ 위에 곡선

$$C = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid 14ax^2 + 2a^2xy + 14ay^2 + x + y - 1 = 0\}$$

이 주어져 있다. 곡선 C를 원점을 중심으로 시계방향으로 $45°$만큼 회전이동 했을 때, 초점이 x축에 있는 쌍곡선이 되는 자연수 a 중에서 가장 작은 수를 구하시오. [2점]

14. 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$에서 위상 $\mathfrak{I}$를

$$\mathfrak{I} = \{G \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} - G\text{는 유한집합}\} \cup \{\varnothing\}$$

으로, 함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$을

$$f(n) = \begin{cases} 1, & 1 \le n < 5 \\ 2, & 5 \le n < 10 \\ 3, & 10 \le n \end{cases}$$

으로 정의하자. $\mathfrak{I}_d$를 $\mathbb{N}$에서 이산위상(discrete topology)이라 하고, 집합 A를

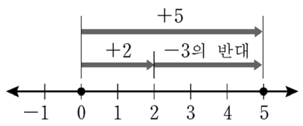
$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid f : (\mathbb{N},\ \mathfrak{I}) \to (\mathbb{N},\ \mathfrak{I}_d)\text{는 } n\text{에서 불연속}\}$$

이라 할 때, 집합 A의 원소의 개수를 구하시오. [2점]

15. 어느 도시의 성인 중 20%가 A 통신사를 이용한다고 한다. 이 도시의 성인 400명을 임의로 조사할 때, A 통신사를 이용하는 성인이 80명 이상 92명 이하가 될 확률을 이항분포의 정규근사를 이용하여 구하면 $P(0 \le Z \le k)$이다. k의 값을 구하시오. (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이고 연속성 보정은 하지 않는다.) [2점]

서술형 【1 ~ 6】

1. 다음은 정수의 사칙연산을 지도하기 위한 셈돌 모델, 수직선 모델, 귀납적 외삽법에 대한 예시이다.

셈돌 모델	$2+(-3)=-1$	●●+○○○=○
수직선 모델	$2-(-3)=5$	
귀납적 외삽법	$2\times(-3)=-6$	$2\times2=4$ $2\times1=2$ $2\times0=0$ $2\times(-1)=-2$ $2\times(-2)=-4$ $2\times(-3)=-6$

정수의 사칙연산을 지도할 때, 셈돌 모델의 약점과 이를 보완할 수 있는 수직선 모델의 장점을 각각 쓰시오. 그리고 정수의 사칙연산을 지도할 때, 수직선 모델의 약점과 이를 보완할 수 있는 귀납적 외삽법의 장점을 각각 쓰시오. [3점]

2. $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology)을 $\Im$, 함수 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$를 $f(n)=n^2$이라 하고, $\mathbb{Z}$ 위의 위상 $\Im_1$을 $\Im_1=\{f^{-1}(G)\mid G\in\Im\}$라 하자. $A=\{0\}\cup\mathbb{N}$, $B=\{-1,1\}$이라 할 때, 적공간(product space) $(\mathbb{Z},\Im_1)\times(\mathbb{Z},\Im_1)$에서 $A\times B$의 폐포(closure) $\overline{A\times B}$와 $A\times B$의 내부(interior) $(A\times B)^\circ$를 구하시오. 이를 이용하여 $(\mathbb{Z},\Im_1)\times(\mathbb{Z},\Im_1)$에서 $A\times B$의 경계(boundary) $b(A\times B)$를 구하는 과정을 쓰시오.
(단, $\mathbb{N}$은 자연수 전체의 집합, $\mathbb{Z}$는 정수 전체의 집합, $\mathbb{R}$는 실수 전체의 집합이다.) [3점]

3. 다항식환 $\mathbb{Z}_{2014}[x]$에서 $f(x)=x^2-14$를 두 일차식의 곱

$$f(x)=(ax+b)(cx+d)$$

로 나타낼 수 없음을 증명하시오. [4점]

4. 연속함수 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$에 대해 집합 $\{f(x)\mid x\in[0,1]\}$의 상한(최소상계, supremum, least upper bound) M이 존재한다. <정리 1>을 증명 없이 이용하여 $f(x^*)=M$을 만족하는 $x^*\in[0,1]$이 존재함을 증명하시오. [4점]

<정리 1>

유계인 실수열은 수렴하는 부분수열을 갖는다.

5. 두 연속확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수(joint probability density function) $f(x,\ y)$를

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}xy(1-x+y), & 0<x<1,\ 1<y<3\\ 0, & \text{그 외의 경우}\end{cases}$$

라 하자. Y의 주변확률밀도함수(marginal probability density function) $f_Y(y)$를 구하고, 이를 이용하여 $Y=2$가 주어졌다는 가정하에 X의 조건부확률밀도함수(conditional probability density function) $f_{X|Y}(x|2)$와 X의 조건부기댓값(conditional expectation) $E[X|Y=2]$를 구하시오. [3점]

6. 자연수 n에 대하여, 방정식

$$x+y+z=n \quad (\text{단, } 1\le x\le 7,\ 0\le y,\ 0\le z)$$

을 만족하는 정수해의 개수를 a_n이라 하자. a_n의 생성함수 $f(x)$를 구하고, 이를 이용하여 a_{15}를 구하시오. [3점]

<수고하셨습니다.>