# 2018학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험

# 수　　학

**수험 번호 : (　　　　　　　　)**　　　　**성　명 : (　　　　　　　)**

| 제1차 시험 | 2교시 전공A | 14문항 40점 | 시험 시간 90분 |
|---|---|---|---|

○ 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하시오.
○ 모든 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.

**1.** 다음은 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학과 교육과정에 제시된 내용 체계의 일부와 수학과 교육과정의 변화에 대한 두 교사의 가상 대화이다.

내용 체계

| 영역 | 핵심 개념 | 내용 요소 | | |
|---|---|---|---|---|
| 문자와 식 | 다항식 | • 문자의 사용과 식의 계산 | • 식의 계산 | • 다항식의 곱셈과 인수분해 |
| | 방정식과 부등식 | • 일차방정식 | • 일차부등식과 연립일차방정식 | • 이차방정식 |
| 확률과 통계 | 확률 | | • 확률과 그 기본 성질 | |
| | 통계 | • 자료의 정리와 해석 | | • 대푯값과 산포도<br>• (　㉠　) |

가상 대화

교사 A: 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 '수학' 과목 교육과정의 내용 영역은 수와 연산, 문자와 식, 함수, 기하, 확률과 통계입니다.

교사 B: 맞아요. 그런데, 2009 개정 교육과정에 따른 중학교 '수학' 과목 교육과정과 어떤 차이가 있나요?

교사 A: 네, 내용 체계에서 확률과 통계 영역의 제시 순서가 바뀌었어요. 그리고 내용 요소에 새롭게 추가된 것이 있어요.

교사 B: 그렇군요. 그러면 문자와 식 영역에도 변화가 있나요?

교사 A: 문자와 식 영역의 내용 중 일부가 바뀌었어요. 다항식의 곱셈과 인수분해를 통합하여 학습하도록 하였고, ㉡ 2009 개정 교육과정에 따른 중학교 '수학' 과목 교육과정의 문자와 식 영역 '용어와 기호'에 있던 내용 중, 2015 개정 교육과정에 따른 고등학교 '수학' 과목 교육과정의 문자와 식 영역 '학습 요소'로 이동한 것이 있어요.

위 내용 체계 에서 괄호 안의 ㉠에 들어갈 내용 요소와 가상 대화 의 ㉡에 해당하는 학습 요소를 순서대로 쓰시오. [2점]

**2.** 위수(order)가 각각 10과 $n$인 두 순환군(cyclic group) $\mathbb{Z}_{10}$과 $\mathbb{Z}_n$의 직접곱(직적, direct product) $\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_n$이 순환군이 되도록 하는 10 이상이고 100 이하인 자연수 $n$의 개수를 구하시오. [2점]

**3.** 자연수 $n$에 대하여 함수 $f_n : [0, \infty)\to\mathbb{R}$를

$$f_n(x)=\max\left\{0, \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}|x-2n|\right)\right\}$$

으로 정의할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx + \int_0^{\infty}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx$$

의 값을 구하시오. (단, $\max\{a, b\}$는 $a$와 $b$ 중 작지 않은 수이다.) [2점]

**4.** 좌표평면에서 영역 $A$가

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ 1\leq x+y\leq 3\}$$

일 때, 변수변환 $2x=u+v$, $2y=u-v$를 사용하여 중적분

$$\iint_A \frac{1}{x+y}\, e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dx\, dy$$

의 값을 구하시오. [2점]

**5.** 확장 복소평면(extended complex plane) $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$에서 정의된 일차분수변환(선형분수변환, linear fractional transformation, bilinear transformation) $T$가

$$T(0)=2,\ \ T(1)=2i,\ \ T(\infty)=-2$$

를 만족시킬 때, $T(2i)$의 값을 구하시오. [2점]

**6.** 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 $\alpha(2)=(0,0,0)$인 단위속력곡선(unit speed curve) $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$에 대하여 곡선 $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$을

$$\beta(t)=\int_2^t \left(\alpha(s)+s^2\boldsymbol{N}(s)\right)ds$$

라 하자. 두 벡터 $\alpha'(2)$, $\beta''(2)$가 서로 수직일 때, $t=2$에서 $\alpha$의 곡률(curvature) $\kappa$의 값을 구하시오. (단, $\boldsymbol{N}(s)$는 곡선 $\alpha$의 주법벡터장(principal normal vector field)이다.) [2점]

**7.** 두 이산확률변수 $X$, $Y$의 결합확률분포가 다음과 같다.

| $X$ \ $Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | 0 | $\frac{1}{5}$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{15}$ |
| 2 | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | 0 |

조건 $Y=1$이 주어졌을 때, 확률변수 $X$의 조건부기댓값 (conditional expectation) $E[X\mid Y=1]$을 구하시오. [2점]

**8.** 점화식

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ 6a_n = 5a_{n-1} - a_{n-2}\ \ (n \geq 3)$$

의 특성다항식(고유다항식, characteristic polynomial)과 이 점화식을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n$을 각각 구하시오. [2점]

**9.** 다음 (가), (나)는 교사 A와 B가 다항식의 곱셈을 지도하는 수업 상황이다.

(가) 교사 A의 수업 상황

교사 A : 다항식의 곱셈에 대한 또 다른 공식을 공부하겠습니다. 다음 공식을 기억하세요.

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

학　생 : 네, 알겠습니다.

교사 A : 그러면 $(x+3)^3$을 전개해 볼게요.

$$\boxed{\begin{aligned}(x+3)^3 &= x^3 + 3\times x^2 \times 3 + 3 \times x \times 3^2 + 3^3 \\ &= x^3 + 9x^2 + 27x + 27\end{aligned}}$$

교사 A : 이제 공식을 이용하여 $(5x+2)^3$을 각자 전개해 보세요.

학　생 : (잠시 후) 공식에 대입하여 전개해 보니 $125x^3 + 150x^2 + 60x + 8$이 되었어요.

교사 A : 맞습니다. 공식을 이용하여 또 다른 문제를 풀어 볼까요?

… (하략) …

(나) 교사 B의 수업 상황

교사 B : $(a+b)^3$을 어떻게 전개하는지 공부하겠습니다.

학　생 : 네, 선생님.

교사 B : 중학교 때 배운 공식 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$을 기억하고 있나요?

학　생 : 네. ㉠ $\underline{(a+b)^2}$을 $\underline{(a+b)(a+b)}$로 바꾸어 전개하면 $\underline{(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2}$이므로 $\underline{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$이 되는 것을 알고 있어요.

교사 B : 맞아요. 그렇다면 $(a+b)^3$은 어떻게 전개할까요?

학　생 : 잘 모르겠어요.

교사 B : $(a+b)^3$을 두 다항식의 곱으로 나타낼 수 있을까요?

학　생 : $(a+b)^3$은 $(a+b)$와 $(a+b)^2$의 곱입니다. 즉, $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$이에요.

교사 B : 그러면 $(a+b)(a+b)^2$을 전개할 수 있을까요?

학　생 : $(a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)$이므로 분배법칙을 이용하여 전개하면 될 것 같아요. (잠시 후) ㉡ 아하, 그러면 $\underline{(a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$이므로 $\underline{(a+b)^3}$은 $\underline{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$이네요. 이제 $\underline{(a+b)^3}$을 어떻게 전개하는지 확실히 알게 되었으니, 혼자서도 할 수 있어요.

교사 B : 그래요. 그러면 $(5x+2)^3$은 여러분이 직접 전개해 볼까요?

… (하략) …

위 (가)의 수업 상황에서 발생할 수 있는 극단적인 교수학적 현상이 무엇인지 쓰고, 그 이유를 설명하시오. 또한 위 (나)의 수업 상황에서 ㉠에서 ㉡으로의 '실제적 발달 수준(actual development level)'의 변화 과정을 비고츠키(L. Vygotsky) 학파의 '비계설정(scaffolding)'에 근거하여 설명하시오. [4점]

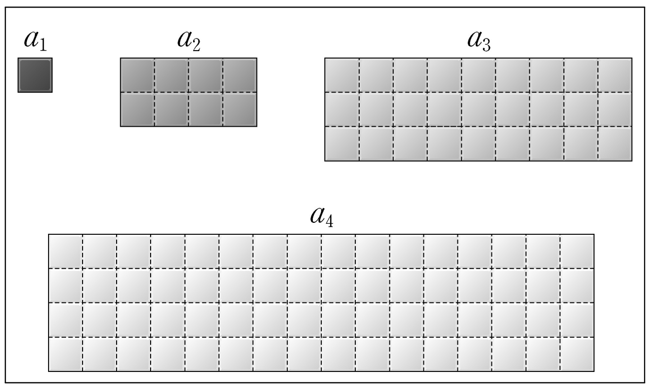
**10.** 다음은 딘즈(Z. Dienes)의 이론에 기초하여 탐구 활동을 강조한 수학 수업에서 사용할 교구 제작 및 활용을 위한 계획서의 일부이다.

**교구 제작 및 활용을 위한 계획서**

<**제작 계획**>

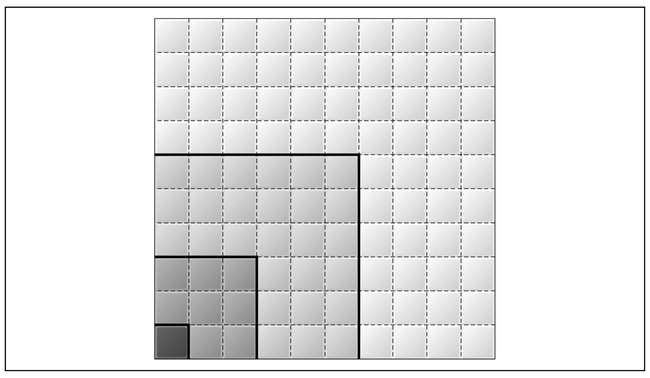
○ 1단계 : 한 변의 길이가 1인 정사각형 조각들을 사용하여 (가)와 같이 직사각형 모양 4개를 만든다. 이때 각 직사각형 모양을 만드는 데 사용된 정사각형 조각의 개수는 $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$이다.

(가)




○ 2단계 : (가)에서 각각의 직사각형 모양을 만드는 데 사용된 모든 정사각형 조각들을 재배치하면 (나)와 같은 큰 정사각형 모양으로 만들 수 있다.

(나)



<**활용 계획**>

○ (가)에 있는 정사각형 조각의 총 개수는 $a_1+a_2+a_3+a_4$임을 파악한다.

○ (나)에 있는 큰 정사각형의 한 변의 길이는 $1+2+3+4$임을 파악한다.

○ (가)와 (나)에 있는 정사각형 조각의 개수는 서로 같다는 것을 인식한다.

… (하략) …

※ 필요하면 $a_1$, $a_2$, $\cdots$, $a_n$에서 $n$의 값에 따른 교구를 추가로 만들어 사용할 수 있다.

위 교구를 활용한 고등학교 수열 단원 수학 수업에서 학습자가 형성하기를 기대하는 일반화된 식을 쓰고, 그 식을 어떻게 유도하였는지 위 교구와 관련지어 설명하시오. 또한 딘즈의 개념 형성 이론의 관점에서, 수학 학습을 위해 고안된 교구 또는 구체물 속에 내포되어 있어야 하는 것이 무엇인지 쓰시오. [4점]

**11.** $f(0)=f'(0)=0$인 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$에 대하여 함수 $g$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g$가 $x=0$에서 미분가능함을 보이고, $g'(0)$의 값을 구하시오. [4점]

**12.** 위상공간 $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{I}_u)$의 부분공간(subspace)

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4\}$$

와 집합

$$X=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$$

에 대하여 함수 $f:A\to X$를

$$f(x,y)=[x^2+y^2]$$

으로 정의하자. 집합 $X$ 위의 위상 $\mathfrak{I}$를

$$\mathfrak{I}=\left\{U\subseteq X \mid f^{-1}(U)\in\mathfrak{I}_u\right\}$$

로 정의할 때, 3을 원소로 갖는 $X$의 모든 열린집합(open set)의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또 위상공간 $(X,\mathfrak{I})$에서 집합 $B=\{1,2\}$의 도집합(derived set) $B'$을 구하시오. (단, $\mathfrak{I}_u$는 $\mathbb{R}^2$ 위의 보통위상(usual topology)이고, $[x]$는 $x$를 넘지 않는 최대 정수이다.) [4점]

**13.** 합동식

$$x^{n+5} - x^{n} - x^{5} + 1 \equiv 0 \pmod{131}$$

의 법 131에 대한 해의 개수가 5가 되도록 하는 130 이하의 자연수 $n$의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

**14.** 다음 두 조건을 만족시키는 유한체(finite field) $\mathbb{Z}_5$ 위의 다항식환(polynomial ring) $\mathbb{Z}_5[x]$의 아이디얼(ideal) $I$의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

| |
|---|
| (가) 잉여환(factor ring, quotient ring) $\mathbb{Z}_5[x]/I$의 위수(order)는 25이다.<br>(나) $\mathbb{Z}_5[x]/I$의 극대 아이디얼(maximal ideal)의 개수는 2이다. |

**<수고하셨습니다.>**