2019학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험

수　　학

수험 번호 : (　　　　　　　　　)　　　　**성　명 : (　　　　　　　)**

제1차 시험	2 교시 전공 A	14문항 40점	시험 시간 90분

○ 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하시오.
○ 모든 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.

1. 김 교사는 반 힐레(P. van Hiele)의 수학 학습 수준 상승을 위한 교수·학습 5단계를 적용하여 고등학교 조합 단원의 수업을 계획하였다. 다음은 김 교사가 계획한 수업 과정을 순서 없이 나열한 것이다.

단계	교수·학습 활동
(가)	학생이 학습할 조합에 친숙해질 수 있도록 서로 다른 4개의 학용품 중에서 2개를 선택하는 경우의 수를 구해 보게 한다. 학생과 대화를 통해서 학습 주제를 소개한다.
(나)	학생은 예전의 경험과 교사의 도움말을 토대로 조합의 구조에 대한 의견을 표현해 봄으로써 그 구조를 명확히 하고, 관계 체계를 형성한다.
(다)	교사는 수형도 등 다양한 방법으로 구할 수 있는 간단한 조합 문제를 제시하여 학생이 해결해 보도록 안내한다. 이를 통해 학습의 방향을 감지하고 조합의 구조를 점진적으로 파악하게 한다.
(라)	교사는 여러 교과서에서 제시된 다양한 탐색적 과제로 구성한 활동지를 제공하여, 학생이 과제를 해결하는 동안 조합의 구조에 정통하게 한다. 또한 실생활 문제를 해결해 봄으로써 다양한 상황에서 조합의 필요성과 유용성을 인식하게 한다.
(마)	학생은 조합과 이전 시간에 학습한 순열의 관련성을 파악하고, 전체적으로 조망하면서 사고 수준의 비약에 이른다.

교수·학습 5단계에 따라 (가)~(마)를 순서대로 배열하고, (마) 단계의 명칭을 쓰시오. [2점]

2. $\mathbb{Z}_7[x]$는 유한체(finite field) $\mathbb{Z}_7$ 위의 다항식환(polynomial ring)이다. $\mathbb{Z}_7[x]$의 주 아이디얼(단항이데알, principal ideal) $I=\langle x^2-x\rangle$에 대하여 잉여환(상환, factor ring, quotient ring) $\mathbb{Z}_7[x]/I$의 단원(unit, unit element)의 개수를 구하시오. [2점]

3. 다음과 같이 정의된 함수 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$가 $(0,0)$에서 연속이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. [2점]

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^n y^n}{x^{30}+y^{30}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

4. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역 D_n이

$$D_n = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-y)^2 + x^2 \le n\}$$

일 때, 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} e^{-\lfloor (x-y)^2 + x^2 \rfloor}\, dx\, dy$$

(단, $\lfloor x \rfloor$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.) [2점]

5. 복소평면에서 곡선 C가

$$C:\ z(t) = \begin{cases} e^{i\pi t}, & 0 \le t \le 1 \\ t-2, & 1 < t \le 3 \end{cases}$$

일 때, 복소적분

$$\int_C (x^2 - y^2 - y) + i(2xy - x)\, dz$$

의 값을 구하시오. (단, $x,\ y$는 실수이고 $z = x + iy$는 복소수이다.)

[2점]

6. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡선 C가

$$C = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^3 - ax + a,\ z = x - 1\}$$

일 때, 이 곡선의 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion) τ를 구하시오. 또한 점 $(1,\ 1,\ 0)$에서 곡선 C의 곡률(curvature)이 3이 되도록 하는 a의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [2점]

7. 두 개의 부품 ㉮와 ㉯로 구성된 시스템이 있다. 이 시스템의 수명은 작동을 시작한 후 두 부품 중 하나가 고장 날 때까지 걸리는 시간이다. 부품 ㉮가 고장 날 때까지 걸린 시간 X와 부품 ㉯가 고장 날 때까지 걸린 시간 Y는 서로 독립이고, 두 확률변수 $X,\ Y$의 확률밀도함수는 각각

$$f_X(x) = \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} \quad (x > 0)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{10} e^{-\frac{y}{10}} \quad (y > 0)$$

이다. 이 시스템의 수명 Z에 대하여 확률 $\mathrm{P}(Z > 10)$을 구하시오.

[2점]

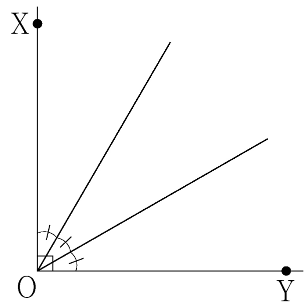
8. 특정 프로젝트에 지원한 5명의 위원 A, B, C, D, E가 있다. 다음은 이 5명의 위원이 작업할 수 있는 요일을 각각 ○ 기호로 표시한 것이다. 이 프로젝트를 수행하기 위하여 5명의 위원 중 4명을 선발하여 서로 다른 요일에 배치하는 경우의 수를 구하시오. (단, 선발된 위원은 일주일 중 하루만 작업한다.) [2점]

요일 / 위원	월	화	수	목	금	토	일
A	○	○	○	○			
B	○		○				
C	○	○		○			
D					○	○	
E					○		○

9. 다음은 어느 예비교사가 수학 교육론 강의 시간에 분석법을 이용하여 직각의 삼등분선의 작도 문제를 해결한 과정이다.

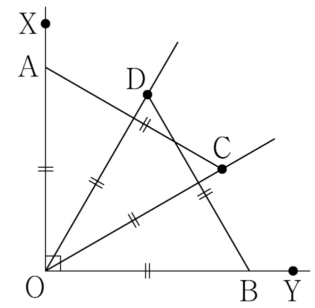
문제 직각 XOY의 삼등분선을 작도하시오.

해결 과정 우선 직각 XOY의 삼등분선이 [그림 1]과 같이 작도되었다고 가정한다.



[그림 1]

삼등분선을 작도하기 위하여 필요한 도형은 직각을 삼등분하는 두 반직선 위의 두 점임을 알 수 있다. 직각을 삼등분하면 한 각의 크기가 30°이므로, [그림 2]와 같이 △AOC와 △DOB가 정삼각형이 되도록 하는 두 점 C, D를 작도하면 된다.



[그림 2]

이를 토대로 직각 XOY의 삼등분선을 작도하는 절차를 정리하면 다음과 같다.

① 점 O를 중심으로 하는 원을 작도하고, 이 원이 두 반직선 OX, OY와 만나는 두 점을 각각 A, B라 한다.

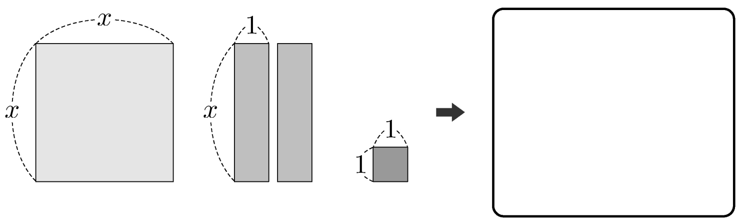
② 점 A를 중심으로 하여 ①에서 작도한 원과 반지름의 길이가 같은 원을 작도하고, ①에서 작도한 원과 만나는 점을 C라 한다.

③ 점 B를 중심으로 하여 ①에서 작도한 원과 반지름의 길이가 같은 원을 작도하고, ①에서 작도한 원과 만나는 점을 D라 한다.

④ 점 O와 점 C, 점 O와 점 D를 각각 이으면 직각의 삼등분선이 된다.

위 과정에서 수학적 발견술인 분석법이 어떻게 적용되었는지 그 근거와 함께 서술하시오. 그리고 작도 문제 해결 교육에서 분석법을 이용하는 의의를 스켐프(R. Skemp)가 제시한 도구적 이해와 관계적 이해의 관점에서 각각 설명하시오. [4점]

10. 다음은 김 교사가 박 교사의 수업을 참관한 후 작성한 참관 일지의 일부이다.

> 박 교사는 도입 단계에서 다음과 같은 탐구 활동을 제시하여 학생의 학습 동기를 유발하고자 하였다.
>
> > [그림 1]과 같이 한 변의 길이가 x인 정사각형 모양 1개, 가로와 세로의 길이가 각각 1과 x인 직사각형 모양 2개, 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양 1개가 있다. 물음에 답하시오.
> >
> > 
> >
> >
> > [그림 1]　　　　[그림 2]
> >
> > (1) [그림 1]의 사각형 4개를 모두 이용하여 만든 정사각형 모양을 [그림 2]의 빈칸에 그려 넣고, 그린 정사각형의 넓이를 (한 변의 길이)^{2}으로 나타내시오.
> > (2) [그림 1]의 사각형 4개의 넓이를 각각 구하여 그 합을 식으로 나타내시오.
> > (3) 위 (1)과 (2)의 결과를 등식으로 나타내시오.
>
> 학생은 탐구 활동을 통하여 $x^2+2x+1=(x+1)^2$이 성립함을 인식하였다.
>
> 박 교사는 학생이 구한 식을 이용하여 인수분해의 뜻을 알려 주고, 이것이 이전 시간에 학습한 다항식의 곱셈 공식과 어떤 관계가 있는지 찾아보도록 안내하였다.
>
> 학생은 다항식의 곱셈 공식을 이용하여 다음과 같은 인수분해 공식을 이끌어 내었다.
>
> $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
>
> $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
>
> ⋯ (하략) ⋯

피아제(J. Piaget)는 활동에 대한 일반적 조정으로부터의 추상화를 무엇이라고 하였는지 쓰시오. 그리고 이 추상화의 예를 위 참관 일지의 상황에서 1가지 찾아, 이 추상화의 과정을 반사와 반성으로 구분하여 그 근거와 함께 설명하시오. [4점]

11. 함수 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가

$$h(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+t^2}\,dt, & x\neq 0\\[2ex] 0, & x=0\end{cases}$$

일 때, 극한값 $\displaystyle\lim_{x\to 0} h(x)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 자연수 n에 대하여 함수 $h_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$가

$$h_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{nx^2}{n^2x^4+k^2}$$

일 때, $\mathbb{R}$에서 함수열 $\{h_n\}$이 h로 평등수렴(균등수렴, 고른수렴, uniform convergence)하는지를 판별하고 그 이유를 쓰시오. [4점]

12. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 위상

$$\mathfrak{I} = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - U \text{는 유한집합}\} \cup \{\varnothing\}$$

에 대하여, $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$의 두 부분공간(subspace) $A = [0, 1] \cup [2, 3)$과 $B = \{3, 4, 5\}$의 위상을 각각 $\mathfrak{I}_A$, $\mathfrak{I}_B$라 하자. 집합 $X = A \cup B$에서 $\mathfrak{I}_A \cup \mathfrak{I}_B$를 기저(base, basis)로 하는 위상을 $\mathfrak{I}'$이라 할 때, 위상공간 $(X, \mathfrak{I}')$에서 집합 $C = \left\{3 - \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{3\}$의 경계(boundary) $b(C)$를 구하시오.

또한 $(X, \mathfrak{I}')$이 컴팩트 공간(compact space)임을 보이시오.

(단, $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}$, $[2, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x < 3\}$이고 $\mathbb{N}$은 자연수 전체의 집합이다.) [4점]

13. 3차원 유클리드 내적 공간 $\mathbb{R}^3$의 세 벡터 $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0, -1, 1)$에 대하여, 두 벡터 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$로 생성된 부분공간을 W_{12}라 하고 두 벡터 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3$으로 생성된 부분공간을 W_{13}이라 하자. $\mathbb{R}^3$의 벡터 $\boldsymbol{u}$에 대하여 부분공간 W 위로의 $\boldsymbol{u}$의 정사영(orthogonal projection)을 $\operatorname{proj}_W \boldsymbol{u}$라 하고, 실수 k에 대하여 선형변환 $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$을

$$T_k(\boldsymbol{u}) = \operatorname{proj}_{W_{12}} \boldsymbol{u} + \operatorname{proj}_{W_{13}} \boldsymbol{u} + k\boldsymbol{u}$$

로 정의하자. T_k의 역변환(inverse transformation)이 존재하지 않도록 하는 모든 k의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 T_k의 랭크(계수, 계급수, 유효차수, rank)가 2인 k의 값을 구하시오. (단, 두 벡터 $\boldsymbol{u}_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{u}_2 = (b_1, b_2, b_3)$의 유클리드 내적은 $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$이다.) [4점]

14. G는 위수(order)가 150인 군(group)이다. 위수가 6인 G의 부분군(subgroup)이 유일하게 존재할 때, 위수가 30인 G의 부분군이 존재함을 보이시오. [4점]

<수고하셨습니다.>