2022학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험

수 학

수험 번호 : (　　　　　　　　)　　　　**성 명 : (　　　　　　　　)**

제1차 시험	3 교시 전공B	11문항 40점	시험 시간 90분

○ 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하시오.
○ 모든 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.

1. 다음은 증명에 대한 두 절대주의 수리철학의 관점 (가)와 (나)를 제시한 것이다. (가)와 (나)에 해당하는 수리철학을 순서대로 쓰시오. [2점]

> (가) 어떤 수학적 대상이 존재함을 보장하기 위해서는 그 대상이 존재하지 않는다고 가정한 후 모순을 이끌어 내는 것만으로는 충분하지 않으며, 유한 번으로 구성될 수 있음을 밝혀야 한다. 배중률을 사용한 존재성 증명은 받아들일 수 없다.
>
> (나) 수학은 엄밀한 방법으로 모순이 없고 완전한 공리 체계로 구성되어야 한다. 기호가 의미하는 것은 중요하지 않기 때문에 점, 선, 면 대신 연필, 의자, 책상이라는 용어를 사용하여도 무방하다. 증명은 정해진 규칙에 따라 의미 없는 기호를 다루는 일종의 기호 조작이다.

2. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에 놓인 곡면 M 위의 점 p에서 모든 접벡터(tangent vector)의 집합을 $T_{\mathrm{p}}(M)$, p에서의 주벡터(principal vector) 중 하나를 e라 하자. $T_{\mathrm{p}}(M)$에 속하는 단위접벡터(unit tangent vector) v와 e의 사잇각을 θ라 할 때, p에서 v 방향으로의 법곡률(normal curvature) $\kappa_n(\theta)$가

$$\int_0^{\pi} \kappa_n(\theta)\, d\theta = \frac{11\pi}{8}$$

를 만족한다고 하자. 점 p에서 곡면 M의 가우스곡률(Gaussian curvature)이 $\frac{3}{2}$일 때, p에서 M의 주곡률(principal curvature)의 값을 모두 쓰시오. (단, 주벡터는 주곡률방향(주방향, principal direction)의 단위접벡터이다.) [2점]

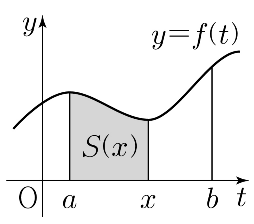
3. 다음은 2015 개정 수학과 교육과정(교육부 고시 제 2020-236호)의 선택 과목 <수학Ⅱ>의 ‘정적분’ 수업에 대한 두 교사의 대화이다.

임 교사 : 정적분 수업을 준비하면서 고등학교에서 다루는 수학 개념은 대학에서 공부했던 수학 개념과는 차이가 있다는 것을 느꼈습니다. 예를 들어 정적분을 정의하는 방식이 그렇습니다. 정적분은 리만적분의 개념을 고등학생들의 학습 수준을 고려하여 의도적으로 변형한 것으로 보입니다.

정 교사 : 맞습니다. 그래서 수학을 가르칠 때는 ㉠지식의 파손성에 유의할 필요가 있습니다. 고등학교에서 정적분을 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수로 한정하여 정의하더라도, 학생들이 불연속 함수에 대해서는 정적분을 아예 정의할 수 없다고 생각하지 않도록 주의할 필요가 있습니다. 실제로 ㉡<수학Ⅱ>의 함수의 극한과 연속 영역에서 다룰 수 있는 함수 중에도 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 불연속이지만 리만적분 가능한 함수 $f(x)$의 예는 많으니까요.

임 교사 : 그런데 이전 교육과정에 비해 정적분의 정의 방식이 달라졌습니다. 그래서 저는 달라진 방식에 따라 정적분의 정의를 제시한 뒤, 몇 가지 예를 통해 정적분의 값을 구해 보게 합니다. 선생님께서는 정적분 개념을 어떻게 지도하시나요?

정 교사 : 저는 먼저 미적분의 기본 정리의 아이디어를 이용하여 정적분이 넓이 측정과 관련되어 있다는 것을 다음과 같이 설명합니다.

> 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(t) \ge 0$이라 하자.
>
> 곡선 $y=f(t)$와 t축 및 두 직선 $t=a,\ t=x\ (a \le x \le b)$로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(x)$라 하자.
>
> 
>
>
> $t \to x$일 때 $\dfrac{S(t)-S(x)}{t-x} \to f(x)$
>
> 이므로 $S'(x)=f(x)$이다.
>
> $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 다음을 얻는다.
>
> $S(x)=F(x)+C$ (단, C는 상수)
>
> ⋯ (중략) ⋯
>
> $S(b)=($ ㉢ $)$

이로부터 (㉢)을/를 $f(t)$의 a에서 b까지의 정적분이라 정의합니다.

임 교사 : 선생님과 제 수업 모두 ㉣2015 개정 수학과 교육과정의 <수학Ⅱ> 적분 영역에 제시된 교수・학습 방법 및 유의 사항을 반영했습니다. 그 결과 정적분의 도입 및 설명 방식은 다르지만, 정적분의 정의는 같네요.

밑줄 친 ㉠의 의미를 쉐발라드(Y. Chevallard)의 교수학적 변환론의 관점에서 서술하고, 밑줄 친 ㉡을 1가지 쓰시오.
또한, 괄호 안의 ㉢에 공통으로 해당하는 내용을 쓰고, 두 교사의 정적분 도입 및 설명 방식이 다른 이유를 밑줄 친 ㉣의 내용을 근거로 설명하시오. [4점]

4. 다음은 '확률'에 대한 중학교 수업의 일부이다.

교 사: 우리가 공부한 확률의 뜻을 이용해서 문제를 풀어 보세요.

> 확률의 뜻 어떤 실험이나 관찰에서 각각의 경우가 일어날 가능성이 같다고 할 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수를 n, 어떤 사건 A가 일어나는 경우의 수를 a라고 하면 사건 A가 일어날 확률 p는
>
> $$p=\frac{a}{n}$$
>
> 문제 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드가 각각 2장씩 있다. 4장의 카드 중에서 2장의 카드를 동시에 뽑아 각 카드에 적힌 두 수를 곱했을 때 1이 나올 확률을 구하시오.

교 사: <학생 A의 풀이>를 같이 볼까요?

> <학생 A의 풀이>
>
> 카드에 적힌 수 1, 2를 서로 곱해서 나올 수 있는 값은 1, 2, 4로 모두 3가지이다. 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 3이므로, 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

교 사: <학생 A의 풀이>에 대하여 의견 있나요?

학생 B: 저는 다르게 풀었습니다. 일어날 수 있는 모든 경우의 수가 6이므로, 답은 $\frac{1}{6}$입니다.

학생 A: 학생 B의 의견을 들어보니, 문제를 풀 때 ㉠ 확률의 뜻에서 제가 확인하지 않은 부분이 있네요.

… (중략) …

교 사: 이번에는 컴퓨터 프로그램을 이용해서 문제를 다시 살펴봅시다. 카드 2장을 뽑는 횟수를 입력하면 $\frac{(\text{두 수의 곱이 1이 되는 횟수})}{(\text{카드 2장을 뽑는 횟수})}$의 값이 나오는 모의실험 프로그램을 작성해 두었습니다. 여러분은 카드 2장을 뽑는 횟수만 입력하면 됩니다.

학생 B: 선생님, 10을 입력하니까 0.2, 30을 입력하니까 0.3, 50을 입력하니까 0.24가 나왔어요. $\frac{1}{6}$과는 차이가 큰 것 같아요.

학생 A: 저는 10을 입력하니까 0.4, 20을 입력하니까 0.4, 30을 입력하니까 0.2가 나왔어요. 저도 $\frac{1}{6}$과 차이가 큰 것 같아요.

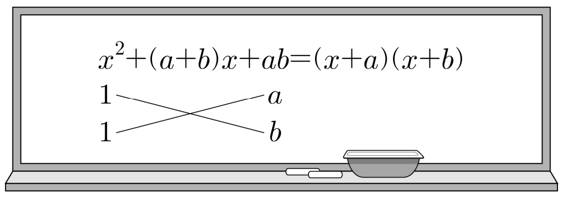
교 사: 그럼 이렇게 해보세요. (㉡)

학생 B: 선생님 말씀대로 했더니 $\frac{1}{6}$에 점점 가까워지는 값이 나오네요.

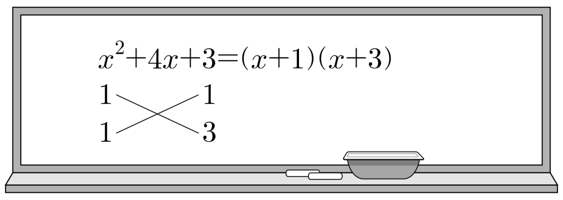
밑줄 친 ㉠의 '확인하지 않은 부분'이 무엇인지 쓰고, 학생 A가 ㉠과 같이 말한 이유를 <학생 A의 풀이>를 이용하여 설명하시오. 또한, 괄호 안의 ㉡에 들어갈 교사의 발문 1가지를 쓰고, 컴퓨터 프로그램을 이용하여 문제를 다시 살펴본 의의를 폴리아(G. Polya)의 문제 해결 과정 중 반성 단계의 측면에서 서술하시오. [4점]

5. 다음은 ‘이차식의 인수분해’에 대한 중학교 수업의 일부이다.

교　사 : 이차식 $x^2+(a+b)x+ab$를 인수분해하는 방법을 알아보겠습니다. 이런 유형의 이차식은 다음과 같은 방법으로 인수분해하면 됩니다.



예를 들어 x^2+4x+3은 다음과 같이 인수분해할 수 있습니다.



$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$를 공책에 쓰고 암기하세요. 이 방법을 사용해서 인수분해할 수 있는 문제 20개를 준비했습니다. 활동지 문제를 풀면서 방법을 연습해 봅시다.

활동지

다음 이차식을 인수분해하시오.

(1) $x^2+4x-5=$

(2) $x^2+4x+4=$

학생 A : 다 풀었어? 우리끼리 답 맞춰 보자.

학생 B : (1)번은 답이 뭐야?

학생 A : $(x+5)(x-1)$이야.

학생 B : 나랑 똑같네. 왜 그렇게 인수분해가 되는지 설명할 수 있어?

학생 A : 그건 몰라. 그런데 오늘 배운 방법을 외우고 있으면 $x^2+(a+b)x+ab$꼴의 이차식의 인수분해는 전부 다 할 수 있어. (2)번 답도 맞춰 보자.

학생 B : (2)번은 $(x+2)^2$이야. $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$을 이용하면 돼. 그런데 $\underline{ab\text{가 } a^2\text{이 될 수는 없으니까}}$ 오늘 배운 방법은 이용할 수 없을 것 같아.

위에 제시된 교사의 수업에서 나타날 수 있는 극단적인 교수 현상을 의미하는 브루소(G. Brousseau)의 용어를 쓰고, 그 판단 근거를 수업 내용과 관련지어 설명하시오.

또한, $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$에 대한 학생 A의 이해 상태를 의미하는 스켐프(R. Skemp)의 용어를 쓰고, 밑줄 친 부분에서 학생 B가 가지고 있을 것으로 예상되는 문자에 대한 오개념 1가지를 제시하시오. [4점]

6. 집합 $X=\{a,\ b,\ c\}$ 위에 $\mathcal{B}=\{\{a\},\ \{a,b\},\ \{c\}\}$를 기저(base, basis)로 갖는 위상 $\mathfrak{I}_{\mathcal{B}}$가 있다. 위상공간 $(X,\ \mathfrak{I}_{\mathcal{B}})$ 위에서 정의된 점렬(점열, sequence of points)

$$x_n=\begin{cases} a & (n\text{은 홀수}) \\ b & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$$

의 극한(limit)을 쓰시오.

또한, 위상공간 $(X,\ \mathfrak{I}_{\mathcal{B}})$에서 공집합이 아닌 임의의 서로소인 두 닫힌집합(closed set) $F_1,\ F_2$에 대하여

$$F_1\subset G_1,\quad F_2\subset G_2,\quad G_1\cap G_2=\varnothing$$

을 만족하는 열린집합(open set) $G_1,\ G_2$가 존재함을 보이시오. [4점]

7. 확률변수 X의 적률생성함수(moment generating function) $M_X(t)$가

$$M_X(t) = \frac{1}{(1-2t)^4} \quad \left(t < \frac{1}{2}\right)$$

이다. 확률변수 X의 분산을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한, $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_{100}$이 적률생성함수가 $M_X(t)$인 분포로부터 뽑힌 확률표본일 때, 이들의 평균 $\overline{X} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$에 대하여 $\overline{X}$가 9 이상이 될 확률은 중심극한정리(central limit theorem)를 적용하면 근사적으로 $P(Z \geq c)$이다. 상수 c의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점]

8. 합동식 $x^5 \equiv 23 \pmod{35}$의 정수해 x를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, x는 35와 서로소이고 $0 \leq x \leq 34$이다.) [4점]

9. 정수 b를 자연수 m으로 나눈 나머지를 b_m이라고 할 때, 자연수 n에 대하여 환 준동형사상(ring homomorphism)

$\psi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{2^n}\times\mathbb{Z}_5$를 $\psi(a,\ b) = (a,\ a,\ b_{2^n},\ b_5)$로

정의하자. ψ의 상(치역, image) $\mathrm{Im}(\psi)$의 단원(unit, unit element)의 개수가 2^7인 자연수 n을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\mathbb{Z}$는 정수환이고 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$와 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{2^n}\times\mathbb{Z}_5$는 환의 직접곱(직적, 직합, direct product, external direct sum)이다.) [4점]

10. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$를

$$f_n(x) = \frac{8(\sin x)^{2n-1}\cos x}{1+(\sin x)^{2n}}$$

로 정의하자. $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+2}$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한, 함수항 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$가 닫힌구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 균등수렴(평등수렴, 고른수렴, uniform convergence)하는지를 판별하고 그 이유를 쓰시오. [4점]

11. 복소수 $z=x+iy$ (x, y는 실수)에 대한 함수

$$f(z)=e^{-3y}\cos(ax)+bx^2-4y^2+iv(x,y)$$

가 정함수(entire function)가 되도록 하는 양의 실수 a, b의 값과, 이 때의 $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오.

(단, $v(x,y)$는 실숫값 함수이다.) [4점]

<수고하셨습니다.>