

2024학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험

수 학

수험 번호 : ()

성 명 : ()

제1차 시험	2 교시 전공 A	12문항 40점	시험 시간 90분
--------	-----------	----------	-----------

- 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하십시오.
- 모든 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.

1. 다음은 수학교육론 수업에서 오수벨(D. Ausubel)의 유의미 수용 학습을 다룬 수업 자료의 일부이다. (가)가 설명하는 ‘지식’과 (나)가 설명하는 ‘원리’를 순서대로 쓰시오. [2점]

(가) 유의미 수용학습이 이루어지기 위한 조건 중 하나는 학습자의 인지구조 내에 학습 과제와 관련이 있는 ‘지식’, 즉 유의미한 학습 과제를 받아들일 수 있는 ‘지식’이 있어야 한다는 것이다.

(나) 유의미 수용학습을 촉진하는 교수·학습 전략 중 하나로, 낯선 새로운 아이디어의 학습이 가능하려면 새로운 아이디어는 반드시 기존의 낯익은 아이디어와 충분히 식별되어야 한다는 ‘원리’가 있다. 예를 들어, 학생이 경우의 수 단원에서 조합의 의미를 새롭게 학습할 때, 이전에 배운 순열의 의미와 어떻게 유사하고 차이가 있는지를 충분히 식별하는 기회를 가져야 한다는 것이다.

2. 복소평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원을 시계 반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선 C 에 대하여 적분

$$\int_C \bar{z} dz - \frac{1}{z} d\bar{z}$$

의 값을 구하십시오. (단, \bar{z} 는 z 의 켈레복소수이다.) [2점]

3. 순환군(cyclic group) G 의 한 부분군(subgroup) H 에 대하여 G 에서의 H 의 지수(index) $|G:H|$ 는 520이다. 잉여군(상군, factor group, quotient group) G/H 의 생성원(generator)의 개수를 구하시오. 또한, G/H 의 한 생성원 aH 와 G 의 한 부분군 K 에 대하여 $K/H = \langle (aH)^{35} \rangle$ 일 때, $G/H = (K/H)(L/H)$ 를 만족시키는 G 의 부분군 L 의 개수를 구하시오. [2점]

4. 3차원 유클리드 공간 \mathbb{R}^3 에서 곡선 C 를

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = e^{ax}, yz = b\} \quad (\text{단, } a, b \text{는 상수})$$

라 하자. 곡선 C 와 yz -평면의 교점 P 에서 곡선 C 의 접선(tangent line)이 점 $(2\sqrt{2}, 3, -1)$ 을 지날 때, $a^2 + b^2$ 의 값과 점 P 에서의 곡률(curvature)을 순서대로 구하시오. [2점]

5. 다음은 강 교수가 예비교사를 대상으로 형식 불역의 원리를 다루는 수업의 일부이다.

강 교수: 지금까지 음수 지도를 형식적인 관점에서 접근하는 형식 불역의 원리를 설명했습니다. 그런데 프로이덴탈(H. Freudenthal)은 이를 '기하적·대수적 형식 불역의 원리'로 확장합니다. 여러분, 오른쪽과 같은 정수의 나눗셈을 어떻게 기하적인 방법으로 접근할 수 있을까요?

$$\begin{aligned} 2 \div 2 &= 1 \\ 1 \div 2 &= \frac{1}{2} \\ 0 \div 2 &= 0 \\ (-1) \div 2 &=? \\ (-2) \div 2 &=? \end{aligned}$$

예비교사 A: 잘 모르겠어요.

강 교수: 자, 주어진 나눗셈 식에서 나누는 수는 얼마인가요?

예비교사 A: 나누는 수는 2입니다.

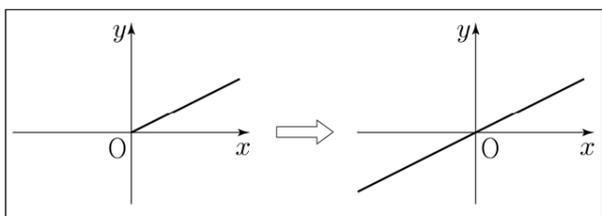
강 교수: 그렇습니다. 그럼 이 연산을 함수로 이해해 봅시다. 나누어지는 수 x 에 연산 결과 y 를 대응시킨다고 할 때, y 는 얼마인가요?

예비교사 B: $x \div 2$, 즉 $\frac{x}{2}$ 입니다.

강 교수: 네, 맞습니다. 그런데 음수의 연산을 아직 배우지 않은 학생들이 할 수 있는 나눗셈 식은 어디까지인가요?

예비교사 A: $0 \div 2 = 0$ 입니다.

강 교수: 맞아요. 음수가 도입되기 전까지는 이 함수의 x 의 범위가 $x \geq 0$ 으로 제한됩니다. 그런데 x 의 범위를 음수까지 확장하면 다음과 같이 함수 $y = \frac{x}{2}$ 의 그래프가 변화하게 됩니다.



예비교사 B: 결국 $x < 0$ 일 때 $x \div 2$ 가 어떻게 정해져야 하는지를 알 수 있는 거네요.

강 교수: 그렇습니다. 예를 들어, 주어진 그래프에서 x 좌표가 -4 일 때의 y 좌표를 구하면 나눗셈 식 (㉠)을/를 유도할 수 있습니다.

예비교사 A: ㉠ 이렇게 음수의 나눗셈을 기하적인 방법으로 해석하다니 정말 창의적인 것 같습니다.

강 교수: 맞아요. 일차함수의 그래프를 배운 후에 음수의 연산을 새로운 관점에서 보는 자료로 활용하면 좋을 것 같습니다.

괄호 안의 ㉠에 들어갈 나눗셈 식을 쓰고, '기하적·대수적 형식 불역의 원리'의 의미를 위의 수업 장면과 관련지어 기하적 측면과 대수적 측면에서 설명하시오. 또한, 밑줄 친 ㉠에서 가장 두드러지게 나타나는 수학 교과 역량의 명칭을 2022 개정 수학과 교육과정에 제시된 용어로 쓰시오. [4점]

6. 다음은 '수학평가론'의 강의 내용을 요약한 공책의 일부이다.

<과제 1> 다음 [문제]에 대한 채점기준표를 만들고, [예시답안]을 채점하시오.

[문제]

두 함수 $f(x) = \log_n x$, $g(x) = 1 - \log_n(x+4)$ 의 그래프가 구간 $1 < x < 2$ 에서 만나도록 하는 모든 n 의 값의 합을 구하시오. (단, $n \geq 2$ 인 자연수이다.) [4점]

[예시답안]

교점을 (x, y) 라 하면, 방정식 $\log_n x = 1 - \log_n(x+4)$ 이므로 방정식 $x^2 + 4x - n = 0$ 은 실근을 가진다. 이차함수의 그래프에 적용하면 직선 $x = -2$ 를 축으로 하는 포물선이므로, $1 < x < 2$ 에서 실근을 가지려면 $D \geq 0$, $f(1) > 0$, $f(2) > 0$ 이다. 따라서 $n \geq -4$, $n < 5$, $n < 12$ 이므로, n 의 값은 2, 3, 4이다. 합은 9이다.

○ 우리가 만든 채점기준표

채점기준표 A	
채점 요소	배점
○ 백지 혹은 오답 이외 다른 내용이 없음	0
○ 문제를 이해한 듯하나, 겨우 풀기 시작함	1
○ 합리적으로 풀었지만, 중요한 실수로 옳은 풀이를 방해함	2
○ 문제는 해결했지만, 단순한 계산 실수로 답을 구하지 못함	3
○ 적절한 방법을 사용하여 문제를 해결하고 답을 구함	4

채점기준표 B		
채점 영역	채점 요소	배점
문제 이해	○ 방정식을 이용하고 있음	1
문제 해결	○ 방정식 $x^2 + 4x - n = 0$ 을 제시함	1
	○ 구간 $1 < x < 2$ 에서 해가 존재할 조건을 제시하고, 모든 n 의 값을 구함	1
답 구하기	○ 모든 n 의 값의 합을 정확히 구함	1

○ [예시답안]의 채점 점수

채점기준표 A에 의한 점수는 (㉠)점이고, 채점기준표 B에 의한 점수는 (㉡)점이다.

<과제 2> 채점기준표 A에 의한 채점 방법과 비교하였을 때, 채점기준표 B에 의한 채점 방법이 가지는 장점 1가지를 적으시오.

괄호 안의 ㉠과 ㉡에 들어갈 점수를 순서대로 쓰고, 괄호 안의 ㉡에 들어갈 점수를 부여한 이유를 채점기준표 B에 근거하여 설명하시오. 또한, <과제 2>에 대한 답을 적고, 장점의 이유를 채점기준표 B에 의한 채점 방법의 의미에 근거하여 서술하시오.

[4점]

7. 좌표평면의 영역

$$D(t) = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq t\} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

과 함수 $f(x, y) = \sqrt{|8x^2 + 8y^2 - 1|}$ 에 대하여

$$g(t) = \iint_{D(t)} f(x, y) dx dy \text{라 하자.}$$

$g(0)$ 과 $g\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

8. 모든 성분이 실수인 3×3 행렬 A 와 행렬 $B = A^2 - A + 5I$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 행렬 $A - 3I$ 는 역행렬을 갖지 않는다.
- (나) 행렬 A 의 특성방정식(고유방정식, characteristic equation)은 허근 α 를 가지고 $|\alpha| = \sqrt{2}$ 이다.
- (다) 행렬 B 의 최소다항식(minimal polynomial)의 차수는 B 의 특성다항식(고유다항식, characteristic polynomial)의 차수보다 낮다.

행렬 A 의 모든 고윳값(eigenvalue)과 대각합(trace) 및 행렬식(determinant)을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, I 는 3×3 단위행렬이다.) [4점]

9. 보통 위상(usual topology)이 주어진 4차원 좌표공간 \mathbb{R}^4 에서

$$A = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1, ac + bd = 0\}$$

이 콤팩트(긴밀, 응골, compact) 집합임을 보이시오. 또한, 집합 A 에서 정의된 함수 $f(a, b, c, d) = ad - bc$ 의 치역을 구하고, 이를 이용하여 집합 A 가 연결집합(connected set)인지 판별하고 그 이유를 쓰시오. [4점]

10. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$$

일 때, $a_{n+1} = f(n)a_n$ 을 만족시키는 $f(n)$ 을 구하고, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^\alpha$ 이 수렴하는 실수 α 의 범위를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

※ 다음 식은 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

모든 자연수 n 에 대하여

$$n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \leq n! \leq n^{n+\frac{1}{2}} e^{1-n}$$

이다.

11. 연속확률변수 X 의 누적분포함수(cumulative distribution function) $F(x)$ 가 연속인 순증가함수(strictly increasing function)라 하자. 확률변수 $F(X)$ 의 확률밀도함수(probability density function)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한, $P(-2 < \ln F(X) < 1)$ 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

12. 체(field) K 를 유리수체 \mathbb{Q} 위에서 $x^{23} - 88$ 의 분해체(splitting field)라 하자. K 의 \mathbb{Q} 위에서의 차수(degree) $[K:\mathbb{Q}]$ 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한, $[K:E] - [E:\mathbb{Q}]$ 가 1010의 양의 약수이고 $\mathbb{Q} \leq E \leq K$ 를 만족시키는 체 E 의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

<수고하셨습니다.>