수 학

수험 번호 : (　　　　　　　　)　　　　　　　　성 명 : (　　　　　　　)

제1차 시험	3교시 전공B	11문항 40점	시험 시간 90분

○ 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하시오.
○ 모든 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.

1. 다음은 2022 개정 중학교 수학과 교육과정의 변화에 대한 두 교사의 대화이다. 괄호 안의 ㉠, ㉡에 해당하는 용어를 순서대로 쓰시오. [2점]

정 교사 : 2022 개정 중학교 수학과 교육과정에서 영역 명칭의 변화가 있네요.

송 교사 : 맞아요. 초등학교와 중학교의 연계성을 강화하기 위해서 초등학교와 통일하여 제시한 것으로 알고 있습니다.

정 교사 : 네. 2015 개정 중학교 수학과 교육과정의 ‘문자와 식’ 영역과 ‘함수’ 영역을 통합하여 (㉠) 영역으로 제시한 거군요.

송 교사 : 그렇습니다. ‘확률과 통계’ 영역도 ‘자료와 가능성’ 영역으로 명칭이 바뀌었어요.

정 교사 : 그럼 자료와 가능성 영역의 ‘내용 체계(표)의 지식 · 이해 범주의 내용 요소’ 중에서, 2015 개정 중학교 수학과 교육과정의 확률과 통계 영역의 ‘내용 체계(표)의 내용 요소’와 비교해서 변화된 내용이 있을까요?

송 교사 : 네. 다음은 자료와 가능성 영역의 내용 체계(표)의 일부인데요. ‘상자그림’이 새롭게 추가된 것을 확인할 수 있습니다.

구분 / 범주	내용 요소		
	중학교		
	1～3학년		
지식 · 이해	• (㉡) • 도수분포표와 상대도수	• 경우의 수와 확률	• 산포도 • 상자그림과 산점도

정 교사 : 그렇군요. 내용 요소에 제시된 (㉡), 도수분포표, 상대도수, 확률, 산포도, 상자그림, 산점도는 자료와 가능성 영역의 ‘성취기준 적용 시 고려 사항’에 자료와 가능성 영역에서 다루는 용어로 제시되어 있습니다.

2. 포아송분포(Poisson distribution) $Poisson(5)$로부터의 확률표본(random sample) $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$에 대하여

$\overline{X}$를 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$라 하자. $\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right)=140$일 때,

n의 값을 구하시오. [2점]

※ 다음은 필요하면 사용할 수 있다.

> 확률변수 X가 $Poisson(\lambda)$를 따르면
> $\mathrm{P}(X=x)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}\quad(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$이다.

3. 다음 (가)는 ‘함수의 연속’에 대한 박 교사의 수업의 일부이고, (나)는 박 교사가 수업 후에 최 교사와 나눈 대화이다.

(가)

박 교사 : 지금부터 함수의 연속에 대해서 배워볼게요. 여러분, 평소에 연속이라는 말을 들어보았나요?

학 생 A : 네, 3년 연속 우승이라고 할 때 연속이요.

학 생 B : 선생님, 연속 촬영도 있어요.

박 교사 : 좋아요. 여러분이 말한 것은 실생활에서 사용되는 연속이네요. 그럼 이제는 수학과 관련해서 연속이라는 말을 어떤 의미로 사용하였는지 말해볼까요?

학 생 A : 보통 선이나 그래프가 끊어지지 않고 이어져 있을 때를 연속이라고 한 것 같아요.

박 교사 : 그렇군요. 여러분 모두 그동안 연속이라는 말을 실생활이나 수학에서 사용해 온 것 같네요. 그런데 수학에서는 몇 가지 조건으로 ‘함수의 연속’을 정의하고 있습니다. 예를 들어, 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \ge 1) \\ 2x & (x<1) \end{cases}$ 이 $x=1$에서 연속인지 불연속인지를 어떻게 판단할까요?

학 생 B : 그래프를 그려서 그래프가 이어져 있는지 확인해 봐요.

박 교사 : 네, 좋은 생각이긴 하지만, 함수의 그래프는 연속을 시각적으로 확인하는 보조적인 수단에 불과합니다. 함수의 연속은 수학적 정의로 판단해야 하는데요. 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 가지 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 합니다.

… (중략) …

박 교사 : 지금까지 $x=a$에서 함수 $f(x)$가 연속일 조건을 알아보고, 이와 관련된 문제를 풀어보았어요. 혹시 질문이 있나요?

학 생 들 : 아니요.

박 교사 : 그렇다면, $x=a$에서 함수 $f(x)$가 연속일 조건을 말해볼까요?

학 생 들 : 함숫값 $f(a)$와 극한값 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$가 존재해야 하구요. $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$이어야 합니다.

박 교사 : 좋아요. 여러분 모두 아주 잘 이해하고 있네요.

(나)

박 교사 : 오늘 수업 시간에 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \ge 1) \\ 2x & (x<1) \end{cases}$ 이 $x=1$에서 연속인지 판단하라고 했더니, 일부 학생들은 연속의 정의보다는 그래프가 이어져 있는지를 확인하려는 모습을 보였습니다.

최 교사 : 저도 같은 경험을 했어요. 학생들은 연속 개념의 형식적 정의보다는 그래프가 끊이지 않고 연결되어 있다는 (㉠)에 영향을 많이 받는 것 같습니다.

박 교사 : 맞아요. 그런데 함수 개념에 대한 이해가 불완전한 학생들도 있어요. 오늘 수업에서 학생 C는 앞의 $f(x)$에 대해서, $y=x^2+1\,(x \ge 1)$과 $y=2x\,(x<1)$은 각각 함수이지만 이를 함께 제시한 $f(x)$는 함수가 아니라고 주장하더군요.

최 교사 : 네, 학자들은 함수 학습과 관련해서 개념 정의와 (㉠)의 불일치, 인식론적 장애에서 비롯되는 어려움을 이야기하는데요. ㉡ <u>학생 C의 어려움은 그중의 하나로, 함수 개념의 역사적 발달 과정에서도 나타난 경향입니다.</u>

박 교사 : 동의합니다.

브루소(G. Brousseau)의 교수학적 상황론의 관점을 바탕으로 (가)의 수업 상황에서 박 교사가 학생들의 개인화와 배경화를 돕고 있다고 볼 수 있는 근거를 기술하고, 학생들의 탈개인화와 탈배경화된 지식을 확인하기 위한 교사의 발문 1가지를 찾아 제시하시오. 또한, 비너(S. Vinner)의 관점에서 (나)의 괄호 안의 ㉠에 들어갈 용어를 쓰고, 밑줄 친 ㉡에 해당하는 함수 학습과 관련된 어려움을 서술하시오. [4점]

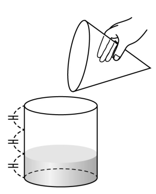
4. 다음은 중학교 입체도형의 부피에 대한 수업 자료의 일부이다.

(가) 1차시 수업 자료 : 원뿔의 부피

○ 학생의 사전 지식 : 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원기둥의 부피는 $V=\pi r^2 h$이다.

○ <탐구활동 1>

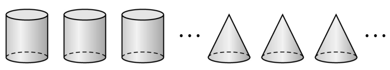
- 밑넓이와 높이가 각각 같은 원기둥과 원뿔 모양의 그릇이 있다. 원뿔 모양의 그릇에 물을 가득 채운 다음, 원기둥 모양의 그릇에 물을 옮겨 붓는다. 원기둥 모양의 그릇에 물이 가득 찰 때까지 반복한다.



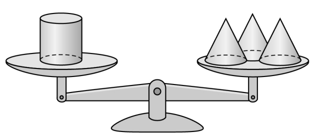
- [물음 1] 밑넓이와 높이가 각각 같은 원기둥과 원뿔의 부피 사이의 관계를 적으시오.

○ <탐구활동 2>

- 재질이 같고, 밑넓이와 높이가 각각 같은 원기둥과 원뿔 모양의 나무조각이 충분히 주어져 있다.



- 수평인 접시저울의 왼쪽 접시에 원기둥 모양의 나무조각을 몇 개 올려놓은 다음, 오른쪽 접시에는 원뿔 모양의 나무조각을 올려놓아, 저울이 수평이 되도록 한다. 활동을 여러 번 실행하고 결과를 관찰한다. (단, 접시저울이 수평이 되면, 양쪽 접시 위에 있는 물체의 부피는 서로 같다.)

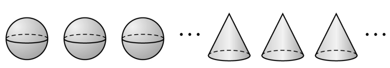


- [물음 2] 위 활동의 결과를 도식으로 표현하고, 원기둥의 부피(V_1)와 원뿔의 부피(V_2) 사이의 관계를 기호로 표현하시오.

(나) 2차시 수업 자료 : 구의 부피

○ <탐구활동 3>

- 재질이 같고, 반지름의 길이가 r인 구 모양의 나무조각과 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 $2r$인 원뿔 모양의 나무조각이 충분히 주어져 있다.



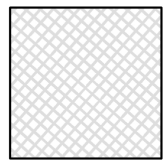
- 수평인 접시저울의 왼쪽 접시에 구 모양의 나무조각을 몇 개 올려놓은 다음, 오른쪽 접시에는 원뿔 모양의 나무조각을 올려놓아, 저울이 수평이 되도록 한다. 활동을 여러 번 실행하고 결과를 관찰한다.
- [물음 3] 위 활동의 결과를 ㉠ <u>도식으로 표현</u>하고, 원뿔의 부피(V_2)와 구의 부피(V_3) 사이의 관계를 ㉡ <u>기호로 표현</u>하시오.
- [물음 4] 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 $2r$인 원기둥의 부피 공식, 반지름의 길이가 r인 구의 부피 공식을 적으시오.

(나)에 따른 수업에서 구의 부피 공식을 발견하는 과정을 <탐구활동 2>와 <탐구활동 3>에 근거하여 설명하시오. 또한, (나)의 [물음 3]에 밑줄 친 서로 다른 2가지 표현(representation) 방식 ㉠과 ㉡의 명칭을 브루너(J. Bruner)의 학습이론에 근거하여 순서대로 쓰고, [물음 3]에서 교사가 기대하는 밑줄 친 ㉠과 ㉡에 대한 학생의 반응을 각각 1가지씩 제시하시오. [4점]

5. 다음은 수학적 모델링과 수학화 과정에 대한 자료이다.

(가) 현실적 문제 상황

[1단계] 작은 소품 상자가 필요해서 문구점에서 한 변의 길이가 12cm인 정사각형 모양의 판지를 구입했다. 네 귀퉁이에서 같은 크기의 정사각형을 잘라내어, 남은 부분으로 뚜껑이 없는 최대 부피를 가지는 직육면체 모양의 소품 상자를 만드는 현실적 문제 상황을 탐구한다.



(나) 미국수학교사협의회(NCTM)의 수학적 모델링 과정

○ '(가)'를 [1단계]로 하는 '수학적 모델링' 과정의 설명과 예시

[2단계]

[설명] (　　　　　㉠　　　　　)

[예시] (　　　　　㉡　　　　　)

[3단계]

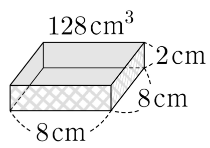
[설명] 수학적 분석을 실시한다.

[예시] 직육면체의 밑면은 한 변의 길이가 $12-2x$인 정사각형이고, 높이가 x이므로 $V(x)=x(12-2x)^2$이다. $V'(x)=12(x-2)(x-6)$이므로, $0<x<6$에서 $V(x)$의 증가와 감소에 의해서 $x=2$에서 $V(x)$는 최대가 된다.

[4단계]

[설명] 현상에 맞도록 재해석하여 결론을 도출한다.

[예시] 판지의 네 귀퉁이에서 잘라내는 정사각형의 한 변의 길이를 2cm로 하면, 상자의 최대 부피는 128cm^{3}이다.



(다) 현실주의적 수학교육 이론의 수학화 과정

○ '(가)'를 [1단계]로 하는 '수학화' 과정의 설명

[2단계] 현실 내의 문제 상황을 형식적인 수학적 처리가 가능하도록 변환하는 과정이다.

[3단계] 세련된 좀 더 높은 수학적 처리가 가능하도록 하는 과정이다.

[4단계] 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 개념을 강화하고 일반화하는 과정이다.

'(가)'가 (나)와 (다)의 [1단계]가 될 수 있는 이유를, '수학적 모델링'과 '수학화'의 개념과 함께 서술하시오. 또한, (나)의 괄호 안의 ㉠과 ㉡에 들어갈 내용을 제시하시오. [4점]

6. 다항식환(polynomial ring) $\mathbb{Z}_n[x]$의 주 아이디얼(principal ideal) $I = \langle x^2 + ax + 1 - a \rangle$에 대하여 잉여환(상환, factor ring, quotient ring) $\mathbb{Z}_n[x]/I$가 홀수인 표수(특성, characteristic)를 갖고 위수(order)가 40 이하인 정역(integral domain)이 되도록 하는 정수의 순서쌍 (n, a)를 풀이 과정과 함께 모두 쓰시오. (단, $0 \le a < n$이다.) [4점]

7. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 곡면

$$M: x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4,\ 0 < x < \frac{4\sqrt{5}}{5},\ 0 < z < \sqrt{3}\,y$$

위의 점 $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$에서의 가우스곡률(Gaussian curvature) K를 구하시오. 또한, 곡면 M에서의 가우스 곡률합(가우스 전곡률, total Gaussian curvature) $\iint_M K\,dA$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, dA는 곡면 M의 면적소(area element)이다.) [4점]

8. 수열 $\{a_n\}$이 $a_0 = a_1 = 0$, $a_n = 1$ $(n \geq 2)$를 만족시킬 때, $\{a_n\}$의 생성함수(generating function) $f(x)$를 구하시오.

또한, 수열 $\{b_n\}$이 $0 < x < 1$에서 $\sqrt{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$을 만족시킬 때, b_5의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

9. r을 홀수인 소수 p의 원시근(primitive root)이라 하고 $X = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k < p-1, \gcd(k, p-1) = 1\}$이라 하자. 임의의 $a, b \in X$에 대하여 r^{ab}이 p의 원시근임을 보이시오.

또한, $a, b \in X$에 대하여 $r^{ab} \equiv r^a \pmod{p}$ 또는 $r^{ab} \equiv r^b \pmod{p}$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수를 $|X|$의 식으로 나타내고, 이러한 순서쌍의 개수가 15가 되도록 하는 모든 소수 p의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $|X|$는 집합 X의 원소의 개수이다.) [4점]

10. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$이

$$f_n(x) = \frac{x}{1+e^{nx}} + \sum_{k=0}^{n-1} x^k \left(e^{-kx} - e^{-(k+1)x}\right)$$

일 때, 함수열 $\{f_n\}$이 $[0, \infty)$에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)함을 보이시오. 또한, $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)dx$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

11. 실숫값을 갖는 두 함수 $u(x, y)$, $v(x, y)$와 복소수 $z = x + iy$ (x, y는 실수)에 대하여 복소함수 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$는 정함수(전해석함수, entire function)이다.

$\overline{f(\overline{z})}$가 정함수임을 보이시오. 또한, $f'(i) = \pi$, $f(-i) = 1$이고 모든 실수 x, y에 대하여

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) > (u(x, -y))^2 + (v(x, -y))^2$$

일 때, $\frac{f'(1-i)}{f(1+i)}$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [4점]

<수고하셨습니다.>